ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Московский государственный университет приборостроения и информатики

кафедра высшей математики

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

учебное пособие для студентов дневной формы обучения для самостоятельной подготовки.

Москва 2007

УДК 517.
Числовые и функциональные ряды. Учебное пособие для студентов дневной формы обучения для самостоятельной подготовки. Сост.: к.т.н., доц.. Зюзько Т.Н. ./МГУПИ. М. 2007.

Излагаются основные методы исследования числовых рядов на сходимость, нахождения областей сходимости степенных рядов, применения рядов к приближенным вычислениям. Приведены примеры решения различных типов задач.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по дневной форме обучения. Библиогр: 5.

Рецензент: к.ф.-м.н., доц. Таперечкина В.А.

Содержание.

Введение.

Данные методические указания состоят из двух разделов . В первом разделе указаны основные методы исследования на сходимость числовых рядов, способы приближенного и точного вычисления суммы числового ряда. . Второй раздел посвящен функциональным рядам: рассмотрены задачи на вычисление области сходимости степенных рядов, разложение функции в ряд Тейлора и приложения степенных рядов к приближенным вычислениям, рассмотрены задачи на разложение функции в ряд Фурье. Цель данного пособия -- помочь студенту самостоятельно подготовиться к экзамену. При написании пособия автор не ставила своей целью дать систематическое изложение теоретического материала. Перед каждой рассматриваемой задачей дается тот теоретический материал, который необходим для ее решения.

§1. Основные определения. Необходимый признак сходимости ряда. Вычисление суммы сходящегося числового ряда.

Прежде чем приступить к решению задач дадим основные определения.
<u>Определение 1.</u> Пусть $\{a_n\}$-- последовательность действительных чисел. Выражение вида:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется **числовым рядом**.

Сумму n первых слагаемых называют n **-ой частичной суммой** ряда и обозначают S_n :

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n .$$

К примеру,

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$$

Частичные суммы ряда $S_1, \quad S_2, \quad S_3, \ldots$ образуют бесконечную числовую последовательность.

Выражение $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ само по себе определенного смысла не имеет, потому что действие сложения производится над конечным числом слагаемых. Этот смысл выражению предстоит приписать нам самим.
Введем понятие суммы ряда.
<u>Определение 2.</u> **Суммой** числового ряда S называется предел последовательности частичных сумм ряда $\{S_n\}$, если этот предел существует и конечен:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n .$$

Числовой ряд при этом называется **сходящимся**.
В противном случае, т.е. если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ равен бесконечности или не существует, то ряд называется **расходящимся**.

<u>Определение 3.</u> Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ряд $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots,$ полученный из исходного отбрасыванием n первых членов называется n **-м остатком ряда**.

Можно доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, то ряд сходится (существует конечная сумма S) и наоборот: остаток r_n сходящегося ряда стремится к нулю с увеличением номера n .

Основной целью теории числовых рядов является установление факта сходимости или расходимости тех или иных рядов и вычисление суммы сходящихся рядов. При этом найти точное значение суммы ряда удается далеко не всегда. В этом случае используются методы приближенного вычисления суммы ряда.
Существует довольно много приемов, позволяющих устанавливать сходимость или расходимость рядов. Такие приемы называются признаками сходимости. К рассмотрению некоторых из них мы и приступаем.

<u>Теорема (**необходимый признак сходимости числового ряда**).</u>

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремиться к нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Из необходимого признака следует, что если n-ый член ряда не стремиться к нулю, то ряд расходиться. Именно это утверждение удобно использовать для решения задач.

Отметим, что необходимый признак не является достаточным, т.е. если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то о сходимости ряда ничего сказать нельзя: он может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Задача №1. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + \ldots$.

Решение.

$$a_n = n^2, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty.$$

Используя необходимый признак сходимости, делаем вывод о том, что ряд расходиться, поскольку n-ый член ряда не стремиться к нулю.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2$ расходится.

.

Задача №2. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{1}{n}$.

Решение. Общий член ряда

$$a_n = n \sin\frac{1}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Следовательно, ряд расходиться по необходимому признаку. Здесь для вычислений использовали первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Ответ: ряд расходится.

Задача №3. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$.

Решение.

$$a_n = (-1)^n,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

не существует. Ряд расходится по необходимому признаку.
Ответ: ряд расходится.
Приведем пример ряда, для которого необходимый признак не дает ответа о его сходимости:

Задача №4. Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Необходимый признак для данного ряда выполняется, поэтому он может быть или сходящимся, или расходящимся. Докажем, что этот ряд на самом деле расходится. Оценим частичную сумму ряда S_n снизу:

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} .$$

Таким образом,

$$S_n > \sqrt{n} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} S_n \ge \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty .$$

Тогда по определению суммы ряда имеем:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \infty .$$

Ответ: ряд расходится.

Задача №5. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{7n+2}$.

Решение. Воспользуемся необходимым признаком и найдем предел n-го члена ряда:

$$a_n = \frac{2n-1}{7n+2},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{7n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2-\frac{1}{n})}{n(7+\frac{2}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{7+\frac{2}{n}} = \frac{2}{7} \ne 0 .$$

Ответ: ряд расходится.

В предыдущих задачах нашей целью было установить сам факт существования суммы ряда. Рассмотрим задачи, в которых удается вычислить точное значение суммы ряда.

Пусть дан числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$, составленный из членов геометрической прогрессии. Здесь a_1 -- первый член прогрессии, q -- знаменатель прогрессии. Если знаменатель прогрессии удовлетворяет условию $|q| < 1$, то прогрессия называется бесконечно убывающей, а ряд, составленный из членов такой прогрессии, сходится, причем сумма ряда равна:

$$S = \frac{a_1}{1-q} .$$

Задача №6. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}}$.

Решение.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{2n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Этот ряд составлен из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии,

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{4} .$$

Сумма ряда равна:

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1\cdot 4}{2\cdot 3} = \frac{2}{3} .$$

Ответ: $S = \frac{2}{3}$.

Задача №7. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2}{3^n}$.

Решение.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} .$$

Здесь первый член геометрической прогрессии $a_1 = -\frac{2}{3}$, знаменатель $q = -\frac{1}{3}$. Тогда

$$S = \frac{-\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{3}} = -\frac{2\cdot 3}{3\cdot 4} = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $S = -\frac{1}{2}$.

Задача №8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{3}{4^{n-2}}$.

Решение.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{3}{4^{n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^2 \frac{3}{4^{-1}}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{4^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}12\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

. Для этого ряда $a_1 = 12, \quad q = -\frac{1}{4}$.

Находим сумму:

$$S = \frac{12}{1+\frac{1}{4}} = \frac{12\cdot 4}{5} = \frac{48}{5}.$$

Ответ: $S = \frac{48}{5}$.

Задача №9. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$.

Решение. Для того чтобы найти сумму этого ряда, представим общий член ряда в виде суммы дробей:

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+3}.$$

Найдем неизвестные коэффициенты следующим образом:

$$\frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+3} = \frac{A(n+3)+B(n+2)}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)},$$

отсюда

$$A(n+3)+B(n+2) = 1.$$

При $n = -3$ из последнего равенства получаем $B = -1$.
При $n = -2 \quad B = 1$.
Таким образом

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}.$$

Найдем n-ую частичную сумму ряда:

$$S_n = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right).$$

После сокращения противоположных слагаемых получим

$$S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3},$$

откуда

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $S = \frac{1}{3}$.

§2. Достаточные признаки сходимости положительных рядов.

1. Признак Даламбера.

<u>Теорема (**признак Даламбера сходимости положительных рядов**).</u>

Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \text{, то}$$

при $l < 1$ ряд сходится,
при $l > 1$ ряд расходится.

Заметим, при $k = 1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным и нужно подобрать другой признак для исследования данного ряда.

Задача №1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

<u>Решение</u>.

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1,$$

следовательно, по признаку Даламбера ряд сходится.

Задача №2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{5^n}$.

<u>Решение</u>.

$$a_n = \frac{n+1}{5^n}, \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{5^{n+1}} \text{,поэтому}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{5^{n+1}}}{\frac{n+1}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)5^n}{(n+1)5^{n+1}} = \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{5} < 1,$$

ряд сходится по признаку Даламбера.
Ответ: ряд расходится.

Задача №3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}$.

<u>Решение.</u>

$$a_n = \frac{3^n}{(2n)!}, \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(2(n+1))!} = \frac{3^{n+1}}{(2n+2)!}, \text{ тогда}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(2n+2)!}}{\frac{3^n}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!\cdot 3^{n+1}}{(2n+2)!\cdot 3^n} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1,$$

Ряд сходится по признаку Даламбера.
Ответ: ряд сходится.

Задача №4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n-2}}{3^{n+1}\sqrt{n}}$.

<u>Решение.</u>

$$a_n = \frac{4^{n-2}}{3^{2n+1}\sqrt{n}}, \quad a_{n+1} = \frac{4^{n-1}}{3^{2n+3}\sqrt{n+1}}, \text{ тогда}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^{2n}}{3^{n+2}\sqrt{n+1}}}{\frac{4^{2n-2}}{3^{n+1}\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^{2n}\cdot 3^{n+1}\sqrt{n}}{4^{2n-2}\cdot 3^{n+2}\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^2\sqrt{n}}{3\sqrt{n+1}} = \frac{16}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{16}{3} > 1,$$

по признаку Даламбера ряд расходится.
Ответ: ряд расходится.

Рассмотренные примеры позволяют сделать вывод о том, что к большинству рядов, общий член которых содержит функции a^n, $n!$, n^n целесообразно применять признак Даламбера.

2. Интегральный признак.

<u>Теорема (**интегральный признак сходимости Коши-Маклорена**).</u>
Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

члены которого положительны и не возрастают.
Пусть $f(x)$ -- функция, которая определена для всех действительных $x \geq 1$, непрерывна, не возрастает и такая, что

$$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ \ldots,\ f(n) = a_n,\ \ldots,$$

тогда для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходился (существовал) интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx.$$

Достоинство интегрального признака состоит в его высокой чувствительности: этот признак четко проводит различие между сходящимся и расходящимся рядами, даже если члены одного из них незначительно отличаются от членов другого.

Сформулируем важное следствие интегрального признака: если положительный ряд можно исследовать на сходимость по интегральному признаку, то его остаток оценивается по формуле:

$$r_n \le \int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)dx .$$

Эта оценка используется для приближенного вычисления суммы сходящихся рядов.

Задача №5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Решение. Воспользуемся интегральным признаком. Введем функцию $f(x)=\frac{1}{x}$, такую, что $a_n = f(n) = \frac{1}{n}$.

Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x}dx ,$$

и исследуем его на сходимость:

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{A\to\infty}\int\limits_1^{A}\frac{1}{x}dx = \lim_{A\to\infty}\left(\ln x\Big|_1^A\right) = \lim_{A\to\infty}\left(\ln A - \ln 1\right) = \infty ,$$

интеграл расходится, поэтому должен расходиться и ряд.
Ответ: ряд расходится.

Задача №6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Решение. $$a_n = f(n) = \frac{1}{n^2},\quad f(x) = \frac{1}{x^2},$$

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{A\to\infty}\int\limits_1^{A}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^A\right) = \lim_{A\to\infty}(-\frac{1}{A}+1) = 1 ,$$

несобственный интеграл сходится (равен конечному числу), следовательно, по интегральному признаку ряд сходится.
Ответ: ряд сходится.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ называется **гармоническим**, а ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при $p>0$ называется рядом Дирихле или **обобщенным гармоническим** рядом. Как было показано в примерах , эту группу рядов можно исследовать на сходимость с помощью интегрального признака:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\text{ --сходится при } p>1 \text{ и расходится при } p\le 1 .$$

Задача №7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

Решение. $$a_n = f(n) = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}},\quad f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}},$$

вычислим несобственный интеграл, используя метод замены переменной:

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx = \lim_{A\to\infty}\int\limits_1^{A}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx = \left|\begin{array}{c} t=\ln x,\ dt=\dfrac{dx}{x} \\ x=1,\ t=0,\ x=A,\ t=\ln A\end{array}\right| = \lim_{A\to\infty}\int\limits_0^{\ln A}\frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{A\to\infty}(2\sqrt{t}\Big|_0^{\ln A} =$$

$$= \lim_{A\to\infty} 2\left(\sqrt{\ln A}-0\right) = \infty.$$

Согласно интегральному признаку из расходимости интеграла следует расходимость ряда.

Ответ: ряд расходится.

3. Признаки сравнения положительных рядов.

К числу достаточных признаков сходимости относятся признаки, позволяющие выяснить вопрос о сходимости некоторого ряда с помощью другого ряда, поведение которого в смысле сходимости нам известно. Такие признаки называются признаками сравнения.

Теорема 1.**(признак сравнения рядов с положительными членами).**

Если ряд с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

сравнить с другим рядом с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$$

сходимость или расходимость которого нам известна, и если начиная с некоторого номера

1). $a_n \le b_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится;

2). $a_n \ge b_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится.

Заметим, что утверждения, обратные утверждениям 1) и 2) в условии теоремы неверны: если сходится ряд с меньшими членами, то о сходимости ряда с большими членами ничего определенного сказать нельзя, и наоборот, если расходится ряд с большими членами, то ряд с меньшими членами может быть как сходящимся так и расходящимся.

При использовании этого признака исследуемый ряд чаще всего сравнивается либо с бесконечной геометрической прогрессией $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$, либо с обобщенными гармоническими рядами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, поведение которых в смысле сходимости мы обсудили выше.

Задача №8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$.

<u>Решение.</u> Сравним данный ряд с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Каждый член $a_n = \frac{\sin^2 n}{n^2}$ данного ряда, начиная с $n = 1$, меньше соответствующего члена $b_n = \frac{1}{n^2}$ обобщенного гармонического ряда:

$$\frac{\sin^2 n}{n^2} \le \frac{1}{n^2},$$

и поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится ($p = 2 > 1$), то согласно утверждению 1) признака сравнения исследуемый ряд также сходится.

Ответ: ряд сходится.

Задача №9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

Решение. Сделаем предположение о том, что данный ряд расходится. Тогда используем утверждение 2) признака сравнения и подбираем расходящийся ряд с меньшими членами:

$$a_n = \frac{1}{\ln n},\ b_n = \frac{1}{n},$$

Поскольку $\ln n < n$ для всех натуральных n, то

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}.$$

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, следовательно по признаку сравнения ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ также расходится.

Ответ: ряд расходится.

Задача №10. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$.

Решение. Главная особенность использования признака сравнения состоит в том, что здесь, в отличие от других достаточных признаков сходимости, необходимо делать предположение о том, сходится ряд или расходится. Докажем сходимость данного ряда. Для этого докажем, что, начиная с некоторого номера n, верно соотношение

$$\ln n < \sqrt[k]{n}.$$

Применяя правило Лопиталя (дифференцирование по n) получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[k]{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{k}n^{\frac{1}{k}-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{k}{n^{\frac{1}{k}}} = 0$$

значит, начиная с некоторого n, функция $\ln n$ меньше $\sqrt[k]{n}$ для любого k.

Положим $k = 2$, тогда

$$\ln n < \sqrt{n}, \text{ откуда имеем}$$

$$\frac{\ln n}{n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2}.$$

$$a_n = \frac{\ln n}{n^2},\quad b_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится ($p = \frac{3}{2} > 1$), следовательно, по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ с меньшими членами также сходится.

Ответ: ряд сходится.

Сформулируем еще один признак сравнения.

Теорема 2. (**обобщенный признак сравнения рядов с положительными членами**).

Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. Если предел отношения общих членов этих рядов $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l$ существует, конечен и не равен нулю, то ряды одновременно сходятся или расходятся.

Задача №11. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{3n^2-1}$.

Решение. Обсудим сначала, каким образом в этом случае подобрать гармонический ряд. Очевидно, что главными в числителе и в знаменателе являются слагаемые, содержащие старшие степени переменной n, именно их и оставим при переходе к гармоническому ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{3n^2-1}\approx\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Обозначим $$a_n=\frac{n+4}{3n^2-1},\ b_n=\frac{1}{n}.$$

Вычислим предел, который подтверждает, что ряды сходятся или расходятся одновременно:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+4}{3n^2-1}}{\frac{n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+4)}{n(3n^2-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{4}{n}\right)}{n^3\left(3-\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{4}{n}}{3-\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{3}\neq 0.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится как гармонический.

Следовательно, по обобщенному признаку сравнения исходный ряд также расходится.
Ответ: ряд расходится.

Задача №12. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5\cdot 7^n+3}$.

Решение. Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n}$.

Докажем, что ряды ведут себя одинаково. Обозначим

$$a_n=\frac{1}{5\cdot 7^n+3},\ \ b_n=\frac{1}{7^n},$$ тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{5\cdot 7^n+3}}{\frac{1}{7^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{5\cdot 7^n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{7^n\left(5+\frac{3}{7^n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\neq 0.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n}$ состоит из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $|q|=\frac{1}{7}<1$ и, следовательно, сходится. По обобщенному признаку сравнения сходится и исследуемый ряд.
Ответ: ряд сходится.

Задача №13. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{16n^5-3n^3+1}}$.

Решение. Сравним данный ряд с обобщенным гармоническим рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{16n^5-3n^3+1}}\approx\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}-1}}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Обозначим $$a_n=\frac{2n+1}{\sqrt{16n^5-3n^3+1}},\ \ b_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n+1}{\sqrt{16n^5+1}}}{\dfrac{n}{\sqrt{n^5}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5}(2n+1)}{n\sqrt{16n^5-3n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5}\cdot n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{n\cdot\sqrt{n^5\left(16-\dfrac{3}{n^3}+\dfrac{1}{n^5}\right)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n}}{16-\dfrac{3}{n^3}+\dfrac{1}{n^5}}=\frac{1}{8}\neq 0.$$

Следовательно, ряды в смысле сходимости ведут себя одинаково.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится, поскольку является обобщенным гармоническим, $p=\dfrac{3}{2}>1$. Тогда по обобщенному признаку сравнения исходный ряд также сходится.

Ответ: ряд сходится.

Задача №14. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot tg\dfrac{1}{n}$.

Решение. Подберем данному ряду обобщенный гармонический ряд так, чтобы ряды сходились или расходились одновременно:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot tg\frac{1}{n}\approx\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Обозначим $a_n=\sqrt{n}\cdot tg\dfrac{1}{n}$, $b_n=\sqrt{n}\cdot\dfrac{1}{n}$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot tg\dfrac{1}{n}}{\sqrt{n}\cdot\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{tg\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}=1\neq 0.$$

Здесь использовалась формула

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1.$$

Обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, $p=\dfrac{1}{2}<1$. Используя обобщенный признак сравнения, делаем вывод о том, что исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot tg\dfrac{1}{n}$ расходится.

Ответ: ряд расходится.

Завершая обсуждение признаков сравнения, добавим, что более простым из них в применении является обобщенный признак сравнения (теорема 2). Признак сравнения (теорема 1) более сложный, но, тем не менее, существуют ряды, которые исследуются на сходимость только с помощью этого признака (именно такие ряды рассмотрены в примерах). Это связано с невозможностью в некоторых случаях вычислить предел, и, следовательно, применить обобщенный признак сравнения.

§3. Знакопеременные числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница.

Все представленные выше достаточные признаки сходимости применимы только к рядам с положительными членами, какие мы и рассматривали до сих пор.

Перейдем к рассмотрению знакопеременных рядов.

Знакопеременным называется ряд, который содержит как положительные, так и отрицательные слагаемые. Опишем методы исследования таких рядов.

Важную информацию о поведении такого ряда можно получить, рассматривая ряд, членами которого являются абсолютные величины членов исходного ряда.

Определение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

где u_n -- числа произвольного знака. Знакопеременный ряд называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд, составленный из модулей его членов.

Теорема. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Другими словами, из сходимости ряда, составленного из модулей знакопеременного ряда, вытекает сходимость самого знакопеременного ряда.

Ряд, составленный из модулей членов знакопеременного ряда, является, очевидно, положительным и, следовательно, к нему применимы все рассмотренные выше признаки сходимости положительных рядов.

Задача №1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$.

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого запишем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Получили положительный ряд, который сходится, так как является обобщенным гармоническим при $p = 3 > 1$. Делаем вывод, что исходный знакопеременный ряд сходится абсолютно.

Ответ: ряд сходится абсолютно.

Задача №2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n!}$.

Решение. Данный ряд является знакопеременным, поскольку знак выражения $\cos n$ меняется. Рассмотрим ряд, состоящий из модулей исходного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n!} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n!}.$$

Получившийся положительный ряд можно исследовать на сходимость с помощью признака сравнения. Для любого натурального n справедливо неравенство:

$$\frac{|\cos n|}{n!} \le \frac{1}{n!}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится, что можно показать по признаку Даламбера, следовательно, по признаку сравнения положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n!}$ сходится, а исходный знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n!}$ сходится абсолютно.

Ответ: ряд сходится абсолютно.

Заметим, что положительные ряды сходятся (имеют конечную сумму) за счет "быстрого" стремления к нулю общего члена ряда, для знакопеременных рядов существует еще одна возможность сходимости: сумма уменьшается за счет вычитания слагаемых. Поэтому для знакопеременных рядов может возникнуть ситуация, когда ряд, составленный из модулей, расходится, а сам знакопеременный ряд сходится. В этом случае говорят об условной сходимости.

Определение. Знакопеременный ряд называется **условно сходящимся**, если он сходится, но не сходиться абсолютно.

Введем понятие знакочередующегося ряда:

Определение. Ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots,$$

$$\text{где } u_n > 0 \text{ для всех } n$$

называется **знакочередующимся**.

Отметим, что в отличие от знакочередующихся рядов, в знакопеременных рядах знаки меняются произвольным образом. Следовательно, знакочередующиеся ряды являются частным случаем знакопеременных.

Для знакочередующихся рядов имеет место достаточный признак сходимости, принадлежащий Лейбницу.

Теорема (**признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов**).

Если для знакопеременного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots$$

выполняются три условия:

1. Ряд является знакочередующимся.
2. Модули членов ряда монотонно убывают:

$$u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq$$

3. Модуль общего члена ряда стремиться к нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

то данный ряд сходится.

Подчеркнем, что все три условия признака Лейбница являются существенными и подлежат проверке.

Договоримся далее по тексту ряд, удовлетворяющий трем условиям признака Лейбница называть рядом Лейбница.

Сформулируем важное следствие теоремы Лейбница, используемое для приближенного вычисления суммы сходящегося ряда.

Можно показать, что для сходящегося ряда Лейбница верна оценка:

$$S < |u_1|, \quad \text{тогда для остатка ряда имеем}$$

$$r_n < u_{n+1}.$$

Задача №3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Решение. Покажем, что данный ряд является рядом Лейбница.

1. Действительно присутствует чередование знаков, т.к.

$$\frac{1}{n} > 0,\ \text{ а }\ (-1)^n = \begin{cases} +1, \text{ если } n = 2k \\ -1, \text{ если } n = 2k+1 \end{cases}$$

2. Имеем монотонное убывание модулей членов ряда, поскольку для всех n верно неравенство:

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}\ .$$

3. Третье условие также выполняется: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

По признаку Лейбница делаем вывод о том, что ряд сходится.
Ответ: ряд сходится.

Задача №4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$.

<u>Решение.</u> Проверим выполнение трех условий признака Лейбница.
1. За чередование знака отвечает множитель $(-1)^n$, знаменатель при этом остается больше нуля:

$$\ln n > 0 \text{ , для всех натуральных } n \ge 2\,.$$

2. Из монотонного возрастания функции $y = \ln x$ следует, что для всех $n \ge 2$ выполняется неравенство:

$$\ln(n+1) > \ln n \text{ , отсюда}$$

$$\frac{1}{\ln} > \frac{1}{\ln(n+1)}\,,\quad \text{т. е. }\ u_n > u_{n+1}\,.$$

3. Справедливо и третье условие: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = 0$.

Ряд сходится условно по признаку Лейбница.
Ответ: ряд сходится.

Задача №5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$.

<u>Решение.</u> а). Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\,.$$

Полученный положительный ряд сравним с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$:

$$a_n = \frac{1}{2n-1}\,,\ \ b_n = \frac{1}{n}\,,$$

тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(2-\frac{1}{n})} = \frac{1}{2} \ne 0.$$

Тогда по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ в смысле сходимости ведет себя также как расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ расходится, следовательно, исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ не является абсолютно сходящимся.

б). Исследуем ряд на условную сходимость. Воспользуемся признаком Лейбница.

1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ -- знакочередующийся, т.к. $2n-1>0$ для всех натуральных n, а

$$(-1)^n = \begin{cases} +1, \textit{если } n = 2k \\ -1, \textit{если } n = 2k+1 \end{cases}.$$

2. $$u_n = \frac{1}{2n-1}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+1}$$, тогда

$$\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n+1},$$

что и означает монотонное убывание модулей членов ряда.

3. Верно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$.

Ряд сходится по признаку Лейбница.

Ответ: ряд сходится.

§4. Приближенное вычисление суммы числового ряда.

Поскольку точное значение суммы ряда удается вычислить далеко не всегда (такие задачи были нами рассмотрены), возникает проблема приближенного вычисления суммы ряда с заданной точностью.

Напомним, что n-ый остаток ряда r_n получается из исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ отбрасыванием первых n слагаемых:

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots .$$

Тогда, поскольку для сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n = S$,

остаток сходящегося ряда равен разности между суммой ряда и n-ой частичной суммой:

$$r_n = S - S_n,$$

и для достаточно больших n имеем приближенное равенство

$$S \approx S_n.$$

Из определения остатка ряда следует, что абсолютная погрешность при замене точного неизвестного значения суммы S его частичной суммой S_n равна модулю остатка ряда:

$$\delta = |S - S_n| = |r_n|.$$

Таким образом, если требуется вычислить сумму ряда с заданной точностью δ, то нужно оставить сумму такого числа n слагаемых, чтобы для отброшенного остатка ряда выполнялось неравенство:

$$|r_n| < \delta.$$

Метод приближенного вычисления суммы выбирается в зависимости от вида ряда:

если ряд положительный и может быть исследован на сходимость по интегральному признаку (удовлетворяет условиям соответствующей теоремы), то для оценки суммы используем формулу

$$r_n \le \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx;$$

если это ряд Лейбница, то применяем оценку:

$$r_n < u_{n+1}.$$

В других задачах можно использовать формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Задача №1. Сколько нужно взять слагаемых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$, чтобы получить его сумму с точностью 0,01.

<u>Решение.</u> Прежде всего отметим, что данный ряд сходится. Рассмотрим n-ый остаток ряда, который и является погрешностью вычислений суммы ряда:

$$r_n = \frac{1}{(n+2)2^{n+1}} + \frac{1}{(n+3)2^{n+2}} + \frac{1}{(n+4)2^{n+3}} + \dots .$$

Оценим этот ряд с помощью бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Для этого заменим в каждом слагаемом множитель $\frac{1}{n+k}$ на $\frac{1}{n+2}$, при этом каждое слагаемое увеличится:

$$r_n = \frac{1}{(n+2)2^{n+1}} + \frac{1}{(n+3)2^{n+2}} + \frac{1}{(n+4)2^{n+3}} + \dots < \frac{1}{(n+2)2^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)2^{n+2}} + \frac{1}{(n+2)2^{n+3}} + \dots =$$

$$= \frac{1}{n+2} \cdot \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \dots \right) = \frac{1}{n+2} \cdot \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{n+2} \cdot \frac{2}{2^{n+1}} = \frac{1}{(n+2)2^n}$$

После вынесения общего множителя за скобку, в скобке остался ряд, составленный из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумму которого мы и вычислили по формуле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Заданная точность будет достигнута, если n будет удовлетворять условию

$$r_n < \frac{1}{(n+2)2^n} < 0{,}01.$$

Решим неравенство, учитывая, что n - целое.

При $n = 4$ имеем

$$\frac{1}{(4+2)2^4} > 0{,}01.$$

При $n = 5$ имеем

$$\frac{1}{(5+2)2^5} = \frac{1}{224} < 0{,}01.$$

В силу монотонности функции $\frac{1}{(n+2)2^n}$, неравенство $r_n < 0{,}01$ будет выполняться для всех $n \ge 5$.

Следовательно, если вместо точного значения суммы мы возьмем первые пять (или более) слагаемых, то погрешность вычислений не превысит 0,01.
Ответ: $n \geq 5$.

Задача №2. Оценить ошибку, получаемую при замене суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2}{n^3}$ суммой первых 100 слагаемых.

Решение. Заметим, что данный ряд является сходящимся и знакопеременным. Оценивать будем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\cos n^2\right|}{n^3}$, состоящий из модулей исходного ряда, что сразу увеличивает погрешность вычислений. Кроме того, нам придется перейти (используя признак сравнения) к большему, более простому сходящемуся ряду:

$$\frac{\left|\cos n^2\right|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}.$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Поскольку этот ряд удовлетворяет условиям теоремы – интегрального признака сходимости, то для оценки погрешности вычисления суммы используем соответствующую формулу:

$$\delta = r_n \leq \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx = \int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^3} dx.$$

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{A \to \infty} \int_{n+1}^{A} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{A \to \infty} \left(-\frac{1}{2x^2} \Bigg|_{n+1}^{A} \right) = \lim_{A \to \infty} \left(-\frac{1}{2A^2} + \frac{1}{2(n+1)^2}\right) = \frac{1}{2(n+1)^2},$$

погрешность вычислений можно оценить по формуле

$$\delta \leq \frac{1}{2(n+1)^2},$$

по условию $n = 100$, тогда $\delta \leq \frac{1}{2(100+1)^2} = \frac{1}{2 \cdot 101^2} = 4{,}9 \cdot 10^{-5} \leq 10^{-6}$.

Ответ: $\delta \leq 10^{-6}$.

Задача №3. Оценить ошибку, получаемую при замене суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3^n}$ суммой первых 10 слагаемых.

Решение. Подчеркнем еще раз, что задача о приближенном вычислении суммы имеет смысл только для сходящегося ряда, поэтому, прежде всего отметим, что данный ряд сходится. Поскольку исследуемый ряд является знакопеременным со сложным правилом изменения знака, то оценивать придется, как и в предыдущем примере, ряд из модулей данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\sin n\right|}{3^n}.$$

Используя тот факт, что $\left|\sin x\right| \leq 1$ при любом значении аргумента, имеем:

$$\frac{\left|\sin n\right|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}.$$

Оценим остаток ряда:

$$r_{10} \leq \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{3^{13}} + \ldots .$$

Мы получили ряд, составленный из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в которой

$$a_1 = \frac{1}{3^{11}}, \quad q = \frac{1}{3},$$

его сумма равна:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3^{11}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1 \cdot 3}{3^{11} \cdot 4} = \frac{1}{4 \cdot 3^{10}} = 0{,}0000042 < 10^{-5},$$

$$\delta \le r_{10} = S < 10^{-5}.$$

Ответ: $\delta \le 10^{-5}$.

Задача №4. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ с точностью 0,01.

<u>Решение.</u> Данный ряд является рядом Лейбница. Для оценки погрешности верна формула:

$$r_n < |u_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^3},$$

другими словами, погрешность вычислений меньше модуля первого отброшенного слагаемого. Подберем номер n так, чтобы

$$\delta = r_n < \frac{1}{(n+1)^3} < 0{,}01.$$

При $n = 3$ имеем

$$\frac{1}{(3+1)^3} > 0{,}01.$$

При $n = 4$ имеем

$$\frac{1}{(4+1)^3} < 0{,}01.$$

Погрешность $\delta \le 0{,}01$, если в качестве значения суммы возьмем сумму первых четырех слагаемых:

$$S \approx 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} = 1 - 0{,}125 + 0{,}037 - 0{,}016 = 0{,}896.$$

Ответ: $S \approx 0{,}896$.

§5. Функциональные ряды. Степенные ряды.

Обобщим понятие числового ряда следующим образом: рассмотрим ряд, в котором элементами являются не числа, а функции. Такой ряд называется функциональным.

<u>Определение.</u> Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

называется **функциональным рядом.**

Дадим определение степенного ряда, который является важным частным случаем функционального.

Определение. Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \quad ,$$

где c_k -- числа, не зависящие от x, называется **степенным рядом.**

Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots$$

также является степенным и называется рядом по степеням $(x-a)$, здесь a -- число.

При любом фиксированном значении x степенной ряд превращается в числовой, который либо сходится, либо расходится.

Определение. Множество всех значений переменной x, при которых степенной ряд сходится, называется его **областью сходимости**.

Всякий степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится при $x = 0$, соответственно ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ сходится при $x = a$.

Область сходимости степенного ряда – это числовой интервал

$$|x| < R,$$

симметричный относительно нуля для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$

и числовой интервал

$$|x-a| < R,$$

симметричный относительно точки a для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n$.

При этом число R называется **радиусом сходимости** степенного ряда. Число R может принимать любые неотрицательные значения. В частности, если $R = 0$, то ряд сходится в одной точке $x = 0$, если $R = \infty$ степенной ряд сходится на всей числовой прямой.

Для нахождения области сходимости степенного ряда обычно используют признак Даламбера. Кроме того, существует формула (Коши-Адамара) для нахождения радиуса сходимости степенного ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}}.$$

При $x < -R$ и при $x > R$ ряд расходится, а поведение ряда при $x = \pm R$ подлежит отдельному исследованию.

Задача №1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} \cdot 3^n}$.

Решение. Применим признак Даламбера:

$$u_n = \frac{x^n}{\sqrt{n} \cdot 3^n}, \; u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1} \cdot 3^{n+1}}, \text{ тогда}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}\cdot 3^{n+1}}}{\dfrac{x^n}{\sqrt{n}\cdot 3^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n}\cdot 3^n\cdot x^{n+1}}{\sqrt{n+1}\cdot 3^{n+1}\cdot x^n}\right| = \frac{|x|}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{|x|}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{|x|}{3}.$$

Ряд сходится, если

$$\frac{|x|}{3} < 1, \quad \text{т.е. } |x| < 3, \quad -3 < x < 3.$$

Таким образом, $R = 3$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

Пусть $x = 3$. Подставим это значение в формулу для исходного ряда. Получим положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{n}\cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Он расходится как обобщенный гармонический, $p = \frac{1}{2} < 1$.

Следовательно, значение $x = 3$ не принадлежит области сходимости.

Пусть $x = -3$. Тогда получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{\sqrt{n}\cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{\sqrt{n}\cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

который является знакопеременным. Исследуем его на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов этого ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Получили положительный обобщенный гармонический ряд, который расходится, поскольку $p = \frac{1}{2} < 1$. Следовательно, исследуемый знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ не сходится абсолютно.

Дальнейшее исследование на сходимость проведем, используя признак Лейбница.

1. Ряд является знакочередующимся.
2. Модули членов ряда монотонно убывают: $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$.
3. Модуль n-го члена ряда стремиться к нулю: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Поскольку все условия признака Лейбница выполняются и ряд не сходится абсолютно, то ряд сходится условно. Таким образом, при $x = -3$ степенной ряд сходится.

Теперь можно записать ответ.

Ответ: $x \in [-3,3)$.

Степенной ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

имеет интервал сходимости, симметричный относительно точки $x = a$, интервал сходимости имеет вид

$$a - R < x < a + R,$$

поведение ряда при $x = a - R$ и $x = a + R$ подлежит, как и в предыдущем случае, дополнительному исследованию.

Задача №2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n^3\cdot 5^n}$.

Решение. Для нахождения интервала сходимости используем, как и прежде, признак Даламбера:

$$u_n=\frac{(x+4)^n}{n^3\cdot 5^n},\ u_{n+1}=\frac{(x+4)^{n+1}}{(n+1)^3\cdot 5^n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x+4)^{n+1}}{(n+1)^3\cdot 5^{n+1}}}{\dfrac{(x+4)^n}{n^3\cdot 5^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^3\cdot 5^n\cdot(x+4)^{n+1}}{(n+1)^3\cdot 5^{n+1}\cdot(x+4)^n}\right|=\frac{|x+4|}{5}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3}=$$

$$=\frac{|x+4|}{5}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)}=\frac{|x+4|}{5}$$

Степенной ряд сходится, если

$$\frac{|x+4|}{5}<1,$$

отсюда имеем:

$$|x+4|<5,$$

следовательно, радиус сходимости степенного ряда $R=5$.

$$-5<x+4<5,\quad -9<x<1,$$

интервал сходимости симметричен относительно точки $x=-4$.

Теперь необходимо выяснить, как ведет себя степенной ряд на концах интервала сходимости.

Пусть $x=1$. После подстановки этого значения в степенной ряд получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+4)^n}{n^3\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}.$$

Это сходящийся обобщенный гармонический ряд и значит число $x=1$ принадлежит интервалу сходимости.

Пусть $x=-9$. Подставим это значение в исходный ряд вместо x:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{n^3\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}.$$

Получили знакочередующийся числовой ряд, который будем исследовать на абсолютную сходимость, т.е. будем исследовать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^3}\right|=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}.$$

Этот положительный ряд сходится как обобщенный гармонический при $p=3>1$.

Отсюда следует, что знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$$

сходится абсолютно и значение $x=-9$ принадлежит интервалу сходимости.

Ответ: $x\in[-9,1]$.

Задача №3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{(n+1)\cdot 9^n}$.

Решение. $u_n = \dfrac{(x-2)^{2n}}{(n+1)\cdot 9^n}, u_{n+1} = \dfrac{(x-2)^{2(n+1)}}{(n+2)\cdot 9^{n+1}}$.

Вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x-2)^{2(n+1)}}{(n+2)\cdot 9^{n+1}}}{\dfrac{(x-2)^{2n}}{(n+1)\cdot 9^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot 9^n\cdot(x-2)^{2n+2}}{(n+2)\cdot 9^{n+1}\cdot(x-2)^{2n}}\right| =$$

$$= \frac{|x-2|^2}{9}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = \frac{(x-2)^2}{9}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)} = \frac{(x-2)^2}{9}$$

Интервал сходимости находим из неравенства

$$\frac{(x-2)^2}{9} < 1:$$

$$(x-2)^2 < 9, \quad |x-2| < 3, \text{ т.е.}$$

радиус сходимости $R=3$, $a=2$.
Интервал сходимости имеет вид: $-1 < x < 5$.
Исследуем поведение ряда на границах интервала сходимости.
Подставим значение $x=-1$ в исходный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1-2)^{2n}}{(n+1)\cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{2n}}{(n+1)\cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{(n+1)\cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ расходится. Таким образом, при $x=-1$ степенной ряд расходится.
При $x=5$ получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5-2)^{2n}}{(n+1)\cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{(n+1)\cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1},$$

Следовательно, при $x=5$ степенной ряд расходится.

Ответ: $x\in(-1,5)$.

Задача №4. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n!}$.

Решение. $u_n = \dfrac{(x+1)^n}{n!}$, $u_{n+1} = \dfrac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{(x+1)^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!\cdot(x+1)^{n+1}}{(n+1)!\cdot(x+1)^n}\right| == |x+1|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = |x+1|\cdot 0 = 0.$$

Мы получили, что $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0 < 1$ независимо от значения x, следовательно,

при любом $x\in R$ степенной ряд сходится, поэтому область сходимости ряда – вся числовая прямая.

Ответ: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Задача №5. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n \cdot x^n$.

Решение. $u_n = n^n \cdot x^n$, $u_{n+1} = (n+1)^{n+1} \cdot x^{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}\cdot x^{n+1}}{n^n \cdot x^n}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1) =$$

$$= |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot (n+1) = |x|\cdot e\cdot\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Степенной ряд расходится при любом значении $x \neq 0$.
Ответ: $x \in \{\,0\,\}$.

§6. Ряд Тейлора. Ряд Маклорена. Использование степенных рядов в приближенных вычислениях.

Рассмотрим задачу разложения некоторой функции в степенной ряд.
Пусть задана функция $f(x)$, имеющая на некотором отрезке производные всех порядков, тогда она разлагается на этом отрезке в ряд вида

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots ,$$

который называется **рядом Тейлора.** Здесь a -- заданное число.

Формально ряд Тейлора можно написать для всякой функции, которая в окрестности точки a имеет производные любого порядка. Однако этот ряд будет сходиться к породившей ее функции только при тех значениях x, при которых остаток ряда стремиться к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Остаток ряда Тейлора записывается в форме Лагранжа следующим образом:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где c заключено между a и x.
Если $a = 0$, то получаем частный случай ряда Тейлора, который называется **рядом Маклорена:**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(x)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots .$$

Рассмотрим ряды Маклорена для некоторых элементарных функций.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \text{--}$$

данный ряд называется биномиальным, поскольку при натуральном m из него получается бином Ньютона.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

Подчеркнем, что степенные ряды для функций $y=e^x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$ сходятся к соответствующим функциям при $x\in(-\infty,+\infty)$, а степенные ряды для функций $y=(1+x)^m$ и $y=\ln(1+x)$ сходятся лишь при $|x|<1$.

Задача №1. Написать разложение в степенной ряд функции $y=e^{x^3}$.

Решение. В качестве исходной формулы возьмем разложение в ряд Маклорена функции $y=e^x$:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots.$$

Заменим x на x^3:

$$e^{x^3}=1+x^3+\frac{(x^3)^2}{2!}+\frac{\left(x^3\right)^3}{3!}+\ldots+\frac{(x^3)^n}{n!}+\ldots=1+x^3+\frac{x^6}{2!}+\frac{x^9}{3!}+\ldots+\frac{x^{3n}}{n!}+\ldots$$

Ответ: $e^{x^3}=1+x^3+\frac{x^6}{2!}+\frac{x^9}{3!}+\ldots+\frac{x^{3n}}{n!}+\ldots$

Задача №2. Написать разложение в степенной ряд функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. Запишем биномиальный ряд

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

и сделаем в нем замену $x\to x^2$:

$$(1+x^2)^m=1+mx^2+\frac{m(m-1)}{2!}\left(x^2\right)^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\left(x^2\right)^3+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\left(x^2\right)^n+\ldots$$

$$(1+x^2)^m=1+mx^2+\frac{m(m-1)}{2!}x^4+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^6+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^{2n}+\ldots.$$

По условию $m=-\frac{1}{2}$, подставим это значение в предыдущую формулу:

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^4+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^6+\ldots+$$

$$+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^{2n}+\ldots$$

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}+\ldots$$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6+\ldots+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}+\ldots.$

Степенные ряды широко используются в приближенных вычислениях. Рассмотрим применение рядов Тейлора для приближенного вычисления значений функций, значений определенных интегралов и приближенного решения дифференциальных уравнений.

Задача №3. Вычислить $\sqrt[6]{e}$ приближенно с точностью 0,0001.

Решение. Для любого x имеет место формула:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \; .$$

При $x = \frac{1}{6}$ получим

$$e^{\frac{1}{6}} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2 \cdot 2!} + \frac{1}{6^3 \cdot 3!} + \ldots + \frac{1}{6^n \cdot n!} + \ldots .$$

Оценим погрешность вычислений с помощью остаточного члена в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} .$$

Так как

$$f^{(n+1)}(x) = e^x, \quad f^{(n+1)}(c) = e^c \text{, то}$$

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} ,$$

где c лежит между 0 и x.

При $x = \frac{1}{6}$ имеем

$$R_n\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{e^c}{(n+1)!}\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} ,$$

где $0 < c < \frac{1}{6}$.

Учитывая, что $e^c < e^{\frac{1}{6}} < 2$, получим

$$R_n\left(\frac{1}{6}\right) < \frac{2}{6^{n+1} \cdot (n+1)!} .$$

При $n = 2$

$$R_2\left(\frac{1}{6}\right) < \frac{2}{6^{2+1} \cdot (2+1)!} = \frac{2}{216 \cdot 3!} = \frac{1}{648} > 0{,}0001 .$$

При $n = 3$

$$R_3\left(\frac{1}{6}\right) < \frac{2}{6^{3+1} \cdot (3+1)!} = \frac{2}{1296 \cdot 4!} = \frac{1}{15552} < 0{,}0001 .$$

Таким образом, для достижения требуемой точности достаточно взять $n = 3$ (или более):

$$\sqrt[6]{e} \approx 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2 \cdot 2!} + \frac{1}{6^3 \cdot 3!} .$$

Каждое слагаемое вычислим с одним дополнительным знаком после запятой, чтобы к нашей ошибке не добавлялись ошибки от округления:

$$\sqrt[6]{e} \approx 1 + 0{,}16667 + 0{,}01389 + 0{,}00077 = 1{,}1813 .$$

Ответ: с точностью 0,0001 $\sqrt[6]{e} \approx 1{,}1813$.

Задача №4. Вычислить $\sqrt[4]{17}$ приближенно с точностью 0,0001.

Решение. Для вычисления $\sqrt[4]{17}$ будем использовать биномиальный ряд, который сходится только при $|x| < 1$, поэтому сначала преобразуем данный корень:

$$\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} = \sqrt[4]{16\left(1+\frac{1}{16}\right)} = 2\cdot\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

В биномиальном ряде положим $m = \frac{1}{4},\ x = \frac{1}{16}$:

$$\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = 1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{16}\right)^2+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{3!}\left(\frac{1}{16}\right)^3+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{4\cdot 16}-\frac{1\cdot 3}{2!4^2\cdot 16^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 7}{3!4^3\cdot 16^3}-\ldots$$

$$\sqrt[4]{17} = 2\cdot\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = 2\cdot\left[1+\frac{1}{4\cdot 16}-\frac{1\cdot 3}{2!4^2\cdot 16^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 7}{3!4^3\cdot 16^3}-\ldots\right].$$

Данный знакочередующийся числовой ряд является рядом Лейбница. Чтобы определить, сколько взять первых членов ряда для вычисления $\sqrt[4]{17}$ с точностью 0,0001, вычислим последовательно несколько первых членов ряда:

$a_1 = 1;\ a_2 \approx 0{,}01562;\ a_3 \approx -0{,}00037;\ a_4 \approx 0{,}00001$.

Согласно свойству ряда Лейбница, если оставить первые три слагаемые, то ошибка искомого приближенного значения корня будет меньше $2a_4$:

$$2a_4 \approx 2\cdot 0{,}00001 < 0{,}0001,$$

следовательно,

$$\sqrt[4]{17} \approx 2(1+0{,}01562-0{,}00037) \approx 2{,}0305.$$

Ответ: с точностью 0,0001 $\sqrt[4]{17} \approx 2{,}0305$

Пусть необходимо посчитать определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

от некоторой функции $f(x)$, первообразная которой не вычисляется в элементарных функциях. Следовательно, формулу Ньютона-Лейбница применить не удается. Если $f(x)$ разложима в степенной ряд на отрезке $[a,b]$, принадлежащем области сходимости ряда, то интеграл может быть вычислен приближенно. Иногда приближенного вычисления бывает достаточно и при наличии первообразной функции. Для решения такой задачи используются ряды Тейлора. Рассмотрим примеры.

Задача №5. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью 0,01.

Решение. Заметим, что этот широко используемый интеграл не выражается в элементарных функциях.

В ряде Маклорена для функции $y = e^x$ сделаем замену $x \to -x^2$:

$$e^{-x^2} = 1-x^2+\frac{(-x^2)^2}{2!}+\frac{(-x^2)^3}{3!}+\ldots = 1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots.$$

Теперь воспользуемся теоремой о том, что степенной ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку, принадлежащему интервалу сходимости. Данный ряд сходится на всей числовой прямой, следовательно, его можно интегрировать по любому отрезку, в том числе по отрезку $[0,1]$:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\ldots\right)dx=\int_0^1 1dx-\int_0^1 x^2dx+\int_0^1\frac{x^4}{2!}dx-\int_0^1\frac{x^6}{3!}dx+\int_0^1\frac{x^8}{4!}dx-\ldots=$$

$$=x\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\frac{x^5}{5\cdot 2!}\Big|_0^1-\frac{x^7}{7\cdot 3!}\Big|_0^1+\frac{x^9}{9\cdot 4!}\Big|_0^1-\ldots=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\ldots$$

Мы получили числовой ряд, который равен значению определенного интеграла. Оценим погрешность вычислений. Данный ряд – это ряд Лейбница, следовательно, погрешность вычислений не превосходит по модулю первого отброшенного члена ряда. Поэтому, вычисляя по порядку члены ряда, первым отбросим тот, который окажется по модулю меньше заданной точности:

$$\frac{1}{7\cdot 3!}>0{,}01,$$

$$\frac{1}{9\cdot 4!}<0{,}01.$$

Тогда $\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}=1-0{,}333+0{,}100-0{,}024=0{,}743.$

Ответ: $\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx 0{,}743.$

Задача №6. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1\cos x^2dx$ с точностью 0,001.

<u>Решение.</u> Вычислить этот интеграл по формуле Ньютона-Лейбница нельзя, поскольку первообразная функции $f(x)=\cos x^2$ не выражается в элементарных функциях. Используем для решения задачи степенной ряд. Запишем разложение в ряд Маклорена функции $f(x)=\cos x$:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots\ .$$

Сделаем в этой формуле замену $x\to x^2$:

$$\cos x^2=1-\frac{(x^2)^2}{2!}+\frac{(x^2)^4}{4!}-\frac{(x^2)^6}{6!}+\frac{(x^2)^8}{8!}-\ldots=1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{12}}{6!}+\frac{x^{16}}{8!}+\ldots$$

Данный ряд можно почленно проинтегрировать по отрезку $[0,1]$:

$$\int_0^1\cos x^2dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{12}}{6!}+\frac{x^{16}}{8!}+\ldots\right)dx=\int_0^1 1dx-\int_0^1\frac{x^4}{2!}dx+\int_0^1\frac{x^8}{4!}dx-\int_0^1\frac{x^{12}}{6!}dx+\int_0^1\frac{x^{16}}{8!}dx+\ldots=$$

$$=x\Big|_0^1-\frac{x^5}{5\cdot 2!}\Big|_0^1+\frac{x^9}{9\cdot 4!}\Big|_0^1-\frac{x^{12}}{12\cdot 6!}\Big|_0^1+\frac{x^{17}}{17\cdot 8!}\Big|_0^1-\ldots=1-\frac{1}{5\cdot 2!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\frac{1}{12\cdot 6!}+\frac{1}{17\cdot 8!}-\ldots\ .$$

Таким образом, вычисляемый определенный интеграл равен сумме знакочередующегося числового ряда, который удовлетворяет условиям признака Лейбница, следовательно, погрешность вычислений не превосходит модуля первого из отброшенных членов ряда.

$$\frac{1}{9\cdot 4!}>0{,}001\ ,\ \ \frac{1}{12\cdot 6!}<0{,}001.$$

Поэтому для достижения заданной точности необходимо оставить первые 3 слагаемые.

$$\int_0^1 \cos x^2 dx \approx 1-\frac{1}{10}+\frac{1}{216}=1-0{,}1000+0{,}0046=0{,}905.$$

Ответ: $\int_0^1 \cos x^2 dx \approx 0{,}905$.

Задача №7. . Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \frac{x-\sin x}{x}dx$ с точностью 0,001.

Решение. Распишем ряд Маклорена для функции $f(x)=\sin x$.

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\dots \; .$$

Тогда

$$x-\sin x = x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\dots\right)=\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}-\frac{x^9}{9!}+\dots \; .$$

Поделим левую и правую часть формулы на x:

$$\frac{x-\sin x}{x}=\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}-\frac{x^8}{9!}+\dots \; .$$

Полученный степенной ряд можно почленно проинтегрировать по отрезку $[0,1]$.

$$\int_0^1 \frac{x-\sin x}{x}dx=\left(\frac{x^3}{3\cdot 3!}-\frac{x^5}{5\cdot 5!}+\frac{x^7}{7\cdot 7!}-\frac{x^9}{9\cdot 9!}+\dots\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3\cdot 3!}-\frac{1}{5\cdot 5!}+\frac{1}{7\cdot 7!}-\frac{1}{9\cdot 9!}+\dots \; .$$

Получившийся числовой ряд сходится по признаку Лейбница, поэтому отбрасываем первым слагаемое, которое меньше объявленной точности:

$$\frac{1}{5\cdot 5!}>0{,}001, \; \frac{1}{7\cdot 7!}<0{,}001.$$

$$\int_0^1 \frac{x-\sin x}{x} \approx \frac{1}{3\cdot 3!}-\frac{1}{5\cdot 5!}=0{,}0555-0{,}0017=0{,}054.$$

Ответ: $\int_0^1 \frac{x-\sin x}{x} \approx 0{,}054$.

Рассмотрим еще одно приложение степенных рядов, к приближенному решению дифференциальных уравнений. Решение дифференциального уравнения не всегда можно выразить в элементарных функциях. Интегралы многих дифференциальных уравнений могут быть представлены в виде степенного ряда, сходящегося в некотором интервале значений независимой переменной. В таком случае ряд, являющийся решением дифференциального уравнения можно найти с помощью рядов Тейлора.

Пусть необходимо найти частное решение дифференциального уравнения с заданными начальными условиями, т.е. решить задачу Коши.

Проиллюстрируем решение на примере.

Задача №8. Найти первые пять членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y''=2xy$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0)=1, y'(0)=1$.

Решение. Будем искать частное решение дифференциального уравнения в виде ряда

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\dots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots \; .$$

Мы выбрали разложение в ряд Маклорена, поскольку в условии задачи нам даны значения искомой функции и ее первой производной в точке $x_0 = 0$. Для того, чтобы найти приближенное значение функции $y(x)$, нам необходимо знать значения ее второй, третьей и четвертой производных в точке $x_0 = 0$. Значения самой функции и первой производной в нуле даны по условию.

Значение второй производной при $x_0 = 0$ найдем из дифференциального уравнения, подставив начальные условия:

$$y''(0) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

Для нахождения третьей производной продифференцируем данное дифференциальное уравнение:

$$(y'')' = (2xy)'.$$

При этом необходимо учесть, что y -- это функция, а x -- независимая переменная:

$$y''' = 2(x'y + xy'), \quad y''' = 2(y + xy').$$

Теперь можно вычислить значение третьей производной в точке $x_0 = 0$:

$$y'''(0) = 2(1 + 0 \cdot 1) = 2.$$

Аналогично вычислим значение четвертой производной:

$$(y''')' = (2(y + xy'))', \text{ или}$$

$$y'''' = 2(y' + x'y' + xy''), \quad y'''' = 2(y' + y' + xy''), \quad y'''' = 2(2y' + xy'').$$

Подставив в найденное равенство значения

$$x_0 = 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 1, \; y''(0) = 0, \; y'''(0) = 2 \text{ получим:}$$

$$y''''(0) = 2(2 \cdot 1 + 0 \cdot 0) = 4 \quad .$$

Осталось подставить вычисленные в заданной точке значения производных в ряд Маклорена:

$$y(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{4}{4!}x^4 = 1 + x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \ldots.$$

Ответ: $y(x) = 1 + x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \ldots$.

Задача №9. Найти первые четыре члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y(1) = 0, \; y'(1) = 1$.

<u>Решение.</u> Начальные условия заданы в точке $a = 1$, поэтому решение будем искать в виде ряда Тейлора:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \ldots + \frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + \ldots.$$

Значения самой функции и ее первой производной даны в условии задачи. Вторую производную в точке $a = 1$ найдем из дифференциального уравнения:

$$y'' = -\frac{y'}{x} - y, \quad y''(1) = -\frac{y'(1)}{1} - y(1), \quad y''(1) = -1 - 0 = -1.$$

Вычислим третью производную, продифференцировав дифференциальное уравнение:

$$(y'')' = \left(-\frac{y'}{x} - y\right)' \text{ или}$$

$$y''' = -\frac{y''x - y'}{x^2} - y'.$$

Тогда значение третьей производной равно

$$y'''(1) = -\frac{y''(1)\cdot 1 - y'(1)}{1^2} - y'(1), \quad y'''(1) = -\frac{-1\cdot 1 - 1}{1} - 1 = -1.$$

Осталось записать искомый ряд:

$$y(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 - \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \ldots = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \ldots$$

Ответ: $y(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \ldots$

§7. Ряды Фурье.

Мы рассмотрели ряды Тейлора, в которых функция разлагалась в ряд по системе многочленов

$$\{u_n(x) = x^n\}, \; n = 0,1,2,\ldots\,.$$

Существуют другие способы разложения функции в ряд. Например, можно разложить функцию в ряд по системе тригонометрических функций. Такое представление широко применяется для описания различных периодических процессов или функций, заданных на отрезке, которые можно доопределить на всю числовую прямую как периодические.

Рассмотрим функцию $f(x)$, периодическую с периодом $T = 2l$.

Определение. Ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{\pi k}{l}x + b_k \sin\frac{\pi k}{l}x\right), \text{ где}$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi k}{l}xdx, \quad b_k = \int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi k}{l}xdx$$

называется **рядом Фурье** для заданной функции $f(x)$.

Для того, чтобы функцию можно было разложить в ряд Фурье она должна быть кусочно непрерывной, кусочно монотонной и ограниченной (т.н. условия Дирихле), то есть требуются гораздо более простые условия, чем для разложения в ряд Тейлора.

Если функция $f(x)$ имеет период $T = 2\pi$, то получаем в качестве частного случая следующее разложение в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx.$$

Рассмотрим примеры.

Задача №1. Разложить в ряд Фурье функцию $y = \begin{cases} 2, -\pi < x < 0 \\ -1, 0 < x < \pi \end{cases}$.

Решение. Данную функцию продолжим на всю числовую прямую как периодическую с периодом $T = 2\pi$, тогда ряд Фурье для нее будет иметь вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right).$$

Необходимо найти коэффициенты разложения a_0, a_k, b_k. Функция задана на интервале $[-\pi,\pi]$ разными формулами, поэтому при вычислении разобьем интеграл на два:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2dx+\int_{0}^{\pi}(-1)dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(2\cdot(0+\pi)-1\cdot(\pi-0)\right)=1.$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2\cos kxdx+\int_{0}^{\pi}(-1)\cos kxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(2\cdot\frac{1}{k}\sin kx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{k}\cdot\sin kx\Big|_{0}^{-\pi}\right)=0.$$

Напомним, что $\sin 0=\sin k\pi=\sin(-k\pi)=0,$ при $k\in Z$.

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2\sin kxdx+\int_{0}^{\pi}(-1)\sin kxdx\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{2}{k}\cos kx\Big|_{-\pi}^{0}-\left(-\frac{1}{k}coskx\Big|_{0}^{\pi}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{2}{k}\left(1-\cos(-k\pi)\right)+\frac{1}{k}\left(\cos k\pi-1\right)\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{2}{k}\left(1-(-1)^k\right)+\frac{1}{k}\left((-1)^k-1\right)\right)=$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{2}{k}\left((-1)^k-1\right)+\frac{1}{k}\left((-1)^k-1\right)\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{3}{k}\left((-1)^k-1\right).$$

При вычислениях использовали, что $\cos 0=\cos k\pi=\cos(-k\pi)=(-1)^k$, $k\in Z$.

Таким образом, ряд Фурье для заданной функции имеет вид:

$$y(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi k}\left((-1)^k-1\right)\sin kx\right).$$

Ответ: $y(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi k}\left((-1)^k-1\right)\sin kx\right).$

Задача №2. Разложить в ряд Фурье функцию $y=\begin{cases}x, -3<x<0\\ 0, 0<x<3\end{cases}$.

<u>Решение.</u> Период функции равен $T=6, l=3$, следовательно, используем ряд вида

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi k}{l}x+b_k\sin\frac{\pi k}{l}x\right).$$

Вычислим коэффициенты ряда:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{0}xdx+\int_{0}^{3}0dx\right)=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}xdx=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^{0}=\frac{1}{3}\left(0-\frac{9}{2}\right)=-\frac{3}{2}.$$

Функция, как и в предыдущем примере, задана разными формулами, поэтому отрезок интегрирования разбиваем на части.

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi}{l}xdx=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{k\pi}{3}xdx=\frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{0}x\cos\frac{k\pi}{3}xdx+\int_{0}^{3}0\cdot\cos\frac{k\pi}{3}xdx\right)=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}x\cos\frac{k\pi}{3}xdx$$

Интеграл вычисляется по частям:

$u=x, dv=\cos\frac{k\pi}{3}xdx, du=dx, v=\int\cos\frac{k\pi}{3}xdx=\frac{3}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{3}x$, тогда

$$b_k = \frac{1}{3}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx = \frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{0} x\sin\frac{k\pi}{3}xdx + \int_{0}^{3} 0\cdot\sin\frac{k\pi}{3}xdx\right) = \frac{1}{3}\int_{-3}^{0} x\sin\frac{k\pi}{3}xdx =$$

$$= \left\| u = x,\ dv = \sin\frac{k\pi}{3}xdx,\ du = dx,\ v = -\frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{3}x \right\| = \frac{1}{3}\left(-x\cdot\frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{3}x\Big|_{-3}^{0} + \int_{-3}^{0}\frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{3}xdx\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{k\pi}x\cos\frac{k\pi}{3}x\Big|_{-3}^{0} + \frac{3}{k\pi}\cdot\frac{3}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{3}x\Big|_{-3}^{0}\right) = -\frac{1}{k\pi}\left(0 + 3\cos(-k\pi)\right) + 0 = -\frac{3}{k\pi}(-1)^k = \frac{3}{k\pi}(-1)^{k+1}$$

Осталось подставить найденные коэффициенты.

Ответ: $f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{k^2\pi^2}\left(1-(-1)^k\right)\cos\frac{\pi k}{3}x + \frac{3}{k\pi}(-1)^{k+1}\sin\frac{\pi k}{3}x\right)$.

Вычисление коэффициентов ряда Фурье значительно упрощается, если известно, что данная функция является четной или нечетной на отрезке $(-l,l)$. В случае четности функции, в разложении остаются лишь четные слагаемые, содержащие $\cos kx$, а все коэффициенты b_k при $\sin kx$ равны нулю.

Если $f(x)$ -- четная, то ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi}{l}x \text{, где}$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx, \quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi}{l}xdx.$$

Если $f(x)$ -- нечетная, то наоборот, ряд состоит из нечетных функций $\sin kx$, а все коэффициенты a_0 и a_k равны нулю:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin\frac{k\pi}{l}x \text{, где}$$

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx.$$

Рассмотрим теперь задачу о разложении в ряд Фурье непериодической функции, заданной на отрезке $[0,l]$. В этом случае можно продлить функцию на всю числовую прямую как четную или как нечетную и воспользоваться формулами разложения в ряд четной или нечетной функции. Тогда периодом функции назначается отрезок $[-l,l]$, $T = 2l$. И разложение называется соответственно разложением в ряд Фурье по синусам или косинусам.

Задача №3. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $y(x) = 3x$ на отрезке $[0,2]$.

Решение. Подчеркнем, что при такой подстановке задачи функция считается заданной на полупериоде, т.е. $l = 2,\ T = 2l = 4$. Ряд по косинусам имеет вид:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi}{2}x.$$

Вычислим коэффициенты:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = \frac{2}{2}\int_0^2 3xdx = 3\int_0^2 xdx = 3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 3\cdot\frac{4}{2} - 0 = 6;$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi}{l}xdx = \frac{2}{2}\int_0^2 3x\cos\frac{k\pi}{2}xdx = 3\int_0^2 x\cos\frac{k\pi}{2}xdx =$$

$$=\left\| u=x,\ dv=\cos\frac{k\pi}{2}xdx,\ du=dx,\ v=\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}x \right\|=$$

$$=3\left(x\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}x\Big|_0^2-\int_0^2\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}xdx \right)=3\left(\frac{2}{k\pi}x\cdot\sin\frac{k\pi}{2}x\Big|_0^2+\frac{2}{k\pi}\cdot\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}x\Big|_0^2 \right)=$$

$$=3\left(0+\frac{4}{k^2\pi^2}(\cos k\pi-1) \right)=\frac{12}{k^2\pi^2}\left((-1)^k-1\right).$$

Осталось записать ответ.

Ответ: $y(x)=3+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{12}{k^2\pi^2}\left((-1)^k-1\right)\cos\frac{k\pi}{2}x$.

Аналогично решается задача о разложении функции в ряд Фурье по синусам, при этом l - - это по-прежнему длина отрезка, на котором задана функция:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\text{, где}$$

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx\ .$$

Литература

1.Я.С. Бугров, С.М. Никольский. Высшая математика т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление. Дрофа. М. 2003. 510 с.
2.В.А. Ильин, А.В. Куркина. Высшая математика. Издательство МГУ. М. 2004. 594 с.
3.Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление.Т.1. М. Наука. 2003.
4.Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу. М. Астрель.2001.496 с.
5.И.П. Натансон. Краткий курс высшей математики. Изд. «Лань» М.2005.736с.